At Right Angles

A Resource for School Mathematics

परिचय
बीजगणित से भाग - 2

पद्मप्रिया शिराली

Azim Premji University

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

परिचय

यह लेख 'बीजगणित – पैटर्नों और डिज़ाइन की भाषा' शृंखला का दूसरा भाग है। यह पद्धति बीजगणित को सम्बन्धों के सामान्यीकरण के रूप में समझने पर आधारित है।

पहले भाग में हमने संख्यात्मक पैटर्नों के माध्यम से *चर, अचर, पद* और *व्यंजक* की अवधारणाओं को जाना था। साथ ही ऐसी विभिन्न संक्रियाओं (जोड़, घटाना, गुणा) का अध्ययन भी किया था जिनमें पद और व्यंजक शामिल थे।

अब भाग-2 में हम *चर, पद* और *व्यंजक* जैसे शब्दों के उपयोग पर फिर से विचार करेंगे। साथ ही ***ज्यामितीय डिज़ाइन*** (लाइन डिज़ाइन, द्विविमीय डिज़ाइन, त्रिविमीय डिज़ाइन) के सन्दर्भ में ऐसी अवधारणाओं व संक्रियाओं पर भी पुनर्विचार करेंगे जिनमें पद और व्यंजक शामिल हों।

ज्यामितीय डिज़ाइन हर जगह दिख जाते हैं। फ़र्श पर टाइल के डिज़ाइन, दीवालों पर ईंट या पत्थर का काम, दरवाज़े व खिड़कियों के पल्ले, गत्तों के डिब्बे (टूथपेस्ट के डिब्बे, जूते के डिब्बे...) और रोज़मर्रा के उपयोग की कई अन्य वस्तुओं का बीजगणितीय रूप में वर्णन किया जा सकता है।

हमेशा की ही तरह अमूर्त बीजगणितीय व्यंजकों की ओर बढ़ने से पहले हम जानी-पहचानी ठोस वस्तुओं से शुरू करते हैं और उन्हें दर्शाने के लिए बीजगणितीय भाषा का उपयोग करते हैं।

बेहतर होगा कि बीजगणित से बच्चों का परिचय पहले पैटर्न पद्धति से करवाया जाए और फिर डिज़ाइन पद्धति का उपयोग किया जाए। हालाँकि दोनों पद्धतियाँ एक-दूसरे से स्वतंत्र हैं।

अलग-अलग मार्गों से बीजगणित तक पहुँचने से हम प्राथमिक स्तर की अनौपचारिक बीजगणित और औपचारिक बीजगणित (जिससे बच्चों का सामना बाद में होता है) के बीच पुख़्ता सम्बन्ध बनाने में सक्षम होंगे। साथ ही इससे बच्चों को बीजगणित की भाषा, यानी कि चर और प्रतीकों को समझने एवं बीजीय नियमों को सही तरीक़े से उपयोग करने में प्रवाहता की सुविधा मिलेगी।

पूर्व ज्ञान : बच्चों को रेखाखण्ड, लम्बाई, क्षेत्र, आयत का क्षेत्रफल, वर्ग का क्षेत्रफल, क्षमता, घन व घनाभ के आयतन जैसी धारणाओं से परिचित होना चाहिए।

मुख्य शब्द : बीजगणित, भाषा, पैटर्न, ज्यामितीय डिज़ाइन, चर, अचर, पद, व्यंजक, संक्रिया

गतिविधि 1

उद्देश्य : डिज़ाइन भाषा से परिचय (लाइन डिज़ाइन के सन्दर्भ में) और अलग-अलग लम्बाइयों के लिए चरों का उपयोग।

सामग्री : स्ट्रा के समूह या अलग-अलग लम्बाई की सीधी छड़ें, बिन्दुकित काग़ज़ (dot paper)।

वास्तविक जीवन से कुछ उदाहरण :

इस सीढ़ी का वर्णन हम किस तरह करेंगे?



यह सीढ़ी कुछ लम्बी और कुछ छोटी छड़ियों से बनी है।

यदि बड़ी छड़ी की ***लम्बाई* '*l* इकाई'** और छोटी छड़ी की लम्बाई **'*s* इकाई'** मानें तो हम सीढ़ी के डिज़ाइन को $2l$ और $5s$ या $\mathbf{2l + 5s}$ के रूप में बता सकते हैं।

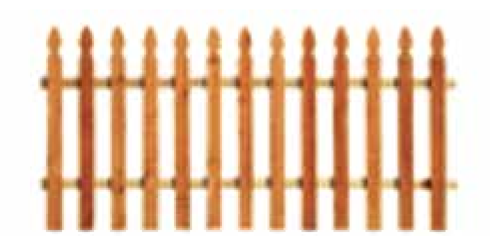
इस घर का वर्णन हम किस तरह करें?

घर के डिज़ाइन को हम $5l$ और $3s$ के रूप में बता सकते हैं।

हम इसे $\mathbf{5a+3b}$ के रूप में भी बता सकते हैं (जहाँ a बड़ी छड़ की लम्बाई है और b छोटी छड़ की लम्बाई।)



इस बाड़ को हम किस तरह बताएँगे?



इसमें कितने *l*'s हैं? और कितने *s*'s हैं? यहाँ *l* बड़ी छड़ की लम्बाई है और *s* छोटी छड़ की लम्बाई।



शुरू में बच्चे दो अलग-अलग लम्बाइयों का उपयोग करके डिज़ाइन बना सकते हैं और एक व्यंजक के रूप में इसका वर्णन कर सकते हैं।

बाद में वे तीन या चार अलग-अलग लम्बाइयों वाले डिज़ाइन बना सकते हैं।



तीन अलग-अलग लम्बाइयों से बना एक डिज़ाइन इस प्रकार है।

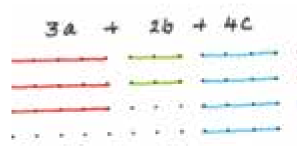
इसे $3a + 2b + 4c$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उपयुक्त डिज़ाइन भाषा का उपयोग करके वर्णन करने के लिए अब बच्चों को इसी तरह के अन्य डिज़ाइन दिए जा सकते हैं।



उन्हें इसके विपरीत प्रकार के अभ्यास भी करवाएँ। उन्हें बिन्दुकित काग़ज़ दें और दिए गए कुछ व्यंजकों के लिए डिज़ाइन बनाने को कहें।

उदाहरण : $3a + 2b + 4c$



उदाहरण : $a + b + b + a$



गतिविधि 2

उद्देश्य : लाइन डिज़ाइन के माध्यम से व्यंजकों को जोड़ना और घटाना।

सामग्री : स्ट्रा या छड़ियाँ, बिन्दुकित काग़ज़।

एक बच्चे से दिए गए किसी व्यंजक जैसे कि $4p + 3q$ के लिए एक डिज़ाइन बनाने को कहें।



दूसरे बच्चे से $2p + 1q$ को दर्शाने के लिए कहें।



इस बात को जाँच लें कि दूसरे बच्चे ने जिन स्ट्रा को चुना हो वह पहले बच्चे द्वारा चुनी गई लम्बाइयों p और q के अनुरूप हों। यदि ऐसा नहीं है तो यह एक अवसर है इस बात पर चर्चा करने का कि p व q एक विशिष्ट लम्बाई को दर्शाते हैं और समान लम्बाई के रेखाखण्डों को एक ही अक्षर द्वारा दर्शाया जाएगा। बच्चों के लिए यह समझना ज़रूरी है कि अलग-अलग चर अलग-अलग संख्याओं को दर्शाते हैं।

अब हम इन दोनों डिज़ाइन को साथ में किस तरह पढ़ें?

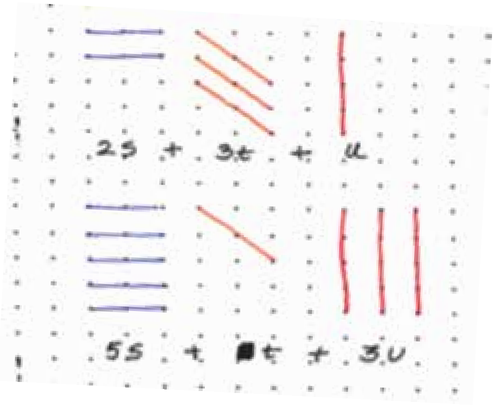
इन्हें हम पढ़ेंगे $6p + 4q$



व्यंजकों के जोड़ को दर्शाने के लिए बच्चों को बिन्दुकित काग़ज़ में डिज़ाइन व व्यंजकों को दर्ज करने को कहें।

बच्चों को व्यंजकों के कुछ और समूह दें, जिनके लिए वे अनुरूप चित्र बना सकें व उन्हें जोड़ सकें।

उदाहरण : $2s + 3t + u$, $5s + t + 3u$

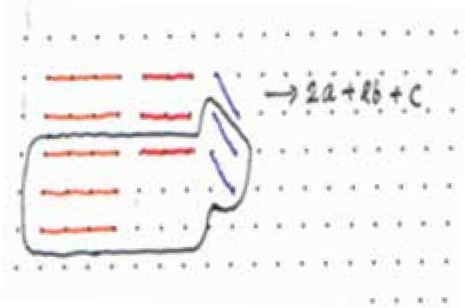


इसी तरह व्यंजकों के घटाव को भी दर्शा सकते हैं। दिए गए किसी व्यंजक जैसे कि $5a + 3b + 3c$ के लिए एक डिज़ाइन बनाएँ।

हटाई जाने वाली स्ट्रा पर गोला बना लें। जैसे कि $3a + b + 2c$



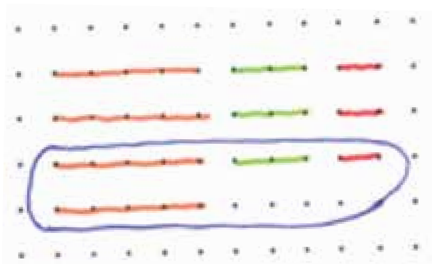
क्या बचा?



$$2a + 2b + c$$

इस संक्रिया को दिखाए गए तरीक़े से बिन्दुकित काग़ज़ में दर्ज किया जा सकता है।

व्यंजकों और दिए गए व्यंजकों के घटाव को दर्ज करने के लिए बच्चों को रेखाखण्डों के डिज़ाइन के कुछ उदाहरण दें जैसे कि यहाँ दर्शाया गया है।



उन्हें प्रारम्भिक डिज़ाइन के लिए, फिर हटाए जाने वाले समूह (गोले में दशाई गई रेखाएँ हटाई जाने वाली रेखाएँ हैं) के लिए और अन्त में बचे हुए समूह के लिए व्यंजक बताने होंगे।

टिप्पणी : चूँकि अभी हम ठोस वस्तुओं के उदाहरण ले रहे हैं इसलिए अभी शिक्षक इस प्रकार के उदाहरण नहीं दे सकते, जैसे कि : $2a + 3b$ में से $a + c$ को घटाओ।

बच्चों को व्यंजकों के कुछ और समूह दें जिनके लिए वे अनुरूप चित्र बना सकें, उन्हें घटा सकें और बचे हुए समूह के लिए व्यंजक दे सकें, कुछ इस तरह :

- $7a + 5b + 3c$ में से $4a + 2b + c$ के घटाव को दर्शाने के लिए एक रेखाखण्ड डिज़ाइन बनाएँ।
- $10c + 8d + 3e + f$ में से $5c + 8d + e$ के घटाव को दर्शाने के लिए एक रेखाखण्ड डिज़ाइन बनाएँ।

गतिविधि 3

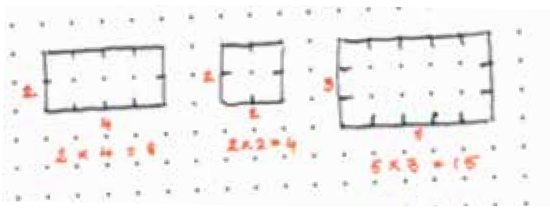
उद्देश्य : ऐसे समतल क्षेत्रों के लिए डिज़ाइन भाषा जिनमें दो चर वाले पद शामिल हों।

सामग्री : अलग-अलग माप के आयत (विजिटिंग कार्ड्स और ग्रीटिंग्स कार्ड के संग्रह इसके लिए काम आ सकते हैं)।

पूर्व जानकारी : आयत व वर्ग के क्षेत्रफल के सूत्र से परिचय।

एक बार फिर अमूर्त डिज़ाइन पर जाने के पहले वास्तविक जीवन की स्थितियों के उदाहरणों का उपयोग करके शुरू करना अच्छा रहेगा।

चित्र में दिखाए अनुसार जाली में बनाई गई आकृतियों (grid shapes) का उपयोग करके आयत व वर्ग के क्षेत्रफल की अवधारणा को दोहराएँ।



दो अलग-अलग माप के आयतों का एक डिज़ाइन बनाएँ।

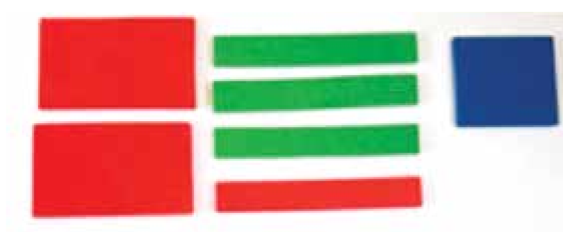


आयतों की लम्बाई व चौड़ाई को चरों का उपयोग कर नाम दिया जा सकता है।

इस डिज़ाइन का वर्णन हम कैसे करेंगे?

इसे हम $3ab + 2cd$ कहेंगे।

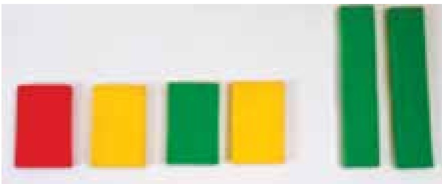
इस डिज़ाइन के लिए क्या व्यंजक होगा?



यह $2ab + 4ef + gh$ होगा।

सम्भव है कि अलग-अलग आयतों का कोई एक किनारा उभयनिष्ठ (common) हो। ऐसी स्थिति में एक ही चर के उपयोग की आवश्यकता पर बच्चों के साथ चर्चा करें। अगली गतिविधि में हम इस सम्भावना पर चर्चा करेंगे।

बिन्दुकित काग़ज़ में बनाने और व्यंजकों को दर्ज करने के लिए बच्चों को समतल क्षेत्र के कुछ डिज़ाइन दें, जैसे कि यहाँ दर्शाए गए हैं।



इसी तरह उन्हें कुछ व्यंजक दें और उनसे सम्बन्धित समतल क्षेत्रों के डिज़ाइन बनाने को कहें,

उदाहरण :

$3ab + 2pq + mn$,

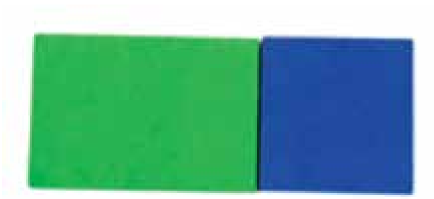
$2a^2 + 3b^2 + c^2$,

$ab + a^2 + b^2$

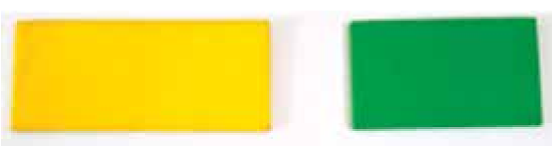
गतिविधि 4

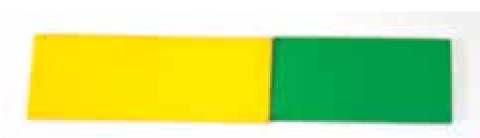
उद्देश्य : संयुक्त आकृतियों (composite figures) के लिए डिज़ाइन भाषा।

सामग्री : अलग-अलग माप के आयत व वर्ग जिनका एक किनारा उभयनिष्ठ हो, बिन्दुकित काग़ज़।



जब दो आयत या एक आयत व एक वर्ग का कोई एक किनारा उभयनिष्ठ हो तो एक संयुक्त आकृति बनाने के लिए उन्हें जोड़ा जा सकता है, जैसे कि यहाँ दर्शाया गया है।





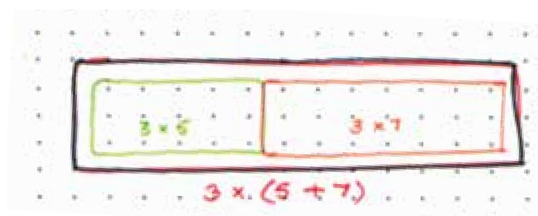
शिक्षकों के लिए टिप्पणी : यह एक पद से (एकपदीय से द्विपदीय) दो पदों वाले व्यंजक के गुणन को जन्म देगा।

शिक्षक पहले आकृतियों को अलग-अलग कर सकते हैं और डिज़ाइन भाषा में इसे $ab + ac$ के रूप में बता सकते हैं।

अब आकृतियों को एक साथ लाया जा सकता है और $a(b + c)$ कहा जा सकता है।

इसके ज़रिए नियम $ab + ac = a(b + c)$ (यानी कि वितरण नियम) स्थापित होता है।

बाद में चर को संख्यात्मक मान देकर और चित्र में दिखाए अनुसार बिन्दुकित सारणियों (dot array) के माध्यम से दर्शाकर इसे और पुख़्ता किया जा सकता है।



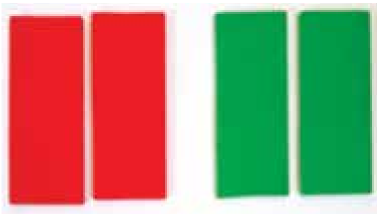
$$3 \times 5 + 3 \times 7 = 3 \times (5 + 7)$$

इस समूह का व्यंजक क्या होगा?



यह होगा $jk + jk + jk = j(k + k + k) = 3jk$

इस समूह के लिए क्या व्यंजक होगा?



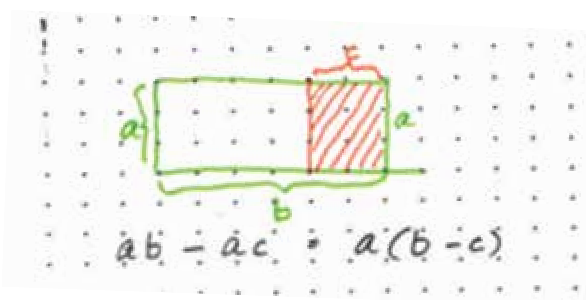
$2ab + 2ab = 4ab$

बिन्दुकित काग़ज़ में बनाने व व्यंजकों को दर्ज करने के लिए बच्चों को समतल क्षेत्र के कुछ डिज़ाइन दें, जैसे कि ऊपर दर्शाए गए हैं।

इसी तरह उन्हें कुछ व्यंजक दें, जैसे कि यहाँ दिए गए हैं, जिनके लिए उन्हें सम्बन्धित समतल क्षेत्र के डिज़ाइन बनाने हों और संयुक्त आकृतियों के लिए व्यंजक लिखने हों।

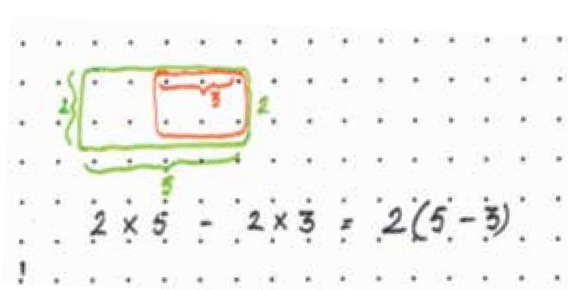
$kl + l^2$, $3pq + 2pr + p2$

इस स्तर पर शिक्षक $ab - ac$ के लिए डिज़ाइन के बारे में भी चर्चा कर सकते हैं। यह इस प्रकार होगा।

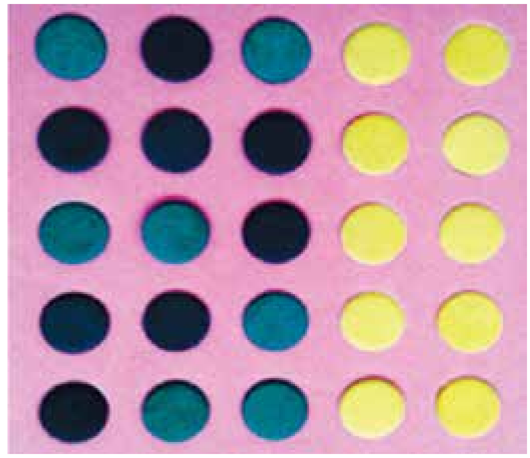


फिर से यह स्थापित किया जा सकता है कि $ab - ac = a(b - c)$

चरों को संख्यात्मक मान देकर और चित्र में दिखाए अनुसार बिन्दुकित सारणी के माध्यम से दर्शाकर इसे और पुख़्ता किया जा सकता है।



$2 \times 5 - 2 \times 3 = 2 \times (5 - 3)$



$5 \times 5 - 5 \times 2 = 5 \times (5 - 2)$

इस तरह के कुछ और उदाहरणों पर भी चर्चा की जा सकती है।

$pq + pr + ps$

$ab + cb + db + fb$

बच्चों से बिन्दुकित काग़ज़ में निम्न को दर्शाने के लिए कहें :

$a(b + c + d) = ab + ac + ad$

$p^2 + pq + pr = p(p + q + r)$

गतिविधि 5

उद्देश्य : सजातीय पदों और विजातीय पदों के जोड़ व घटाव के नियम, एक चर से व्यंजकों का गुणन।

सामग्री : अलग-अलग माप के आयत और वर्ग, बिन्दुकित काग़ज़।

शब्दावली : सजातीय आयत, विजातीय आयत, सजातीय पद, विजातीय पद।



बच्चों से कोई भी दो आयत लेने को कहें। उनसे पूछें, "क्या यह आयत एक समान हैं?" या "यह आयत अलग-अलग हैं?"

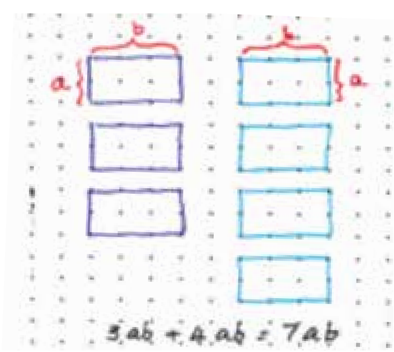
यदि दो आयतों की लम्बाई व चौड़ाई एक समान हो तो वह सजातीय आयत हैं।

सम्भव है कि बच्चे ऐसे दो आयत लें जिनकी लम्बाई तो समान हो लेकिन चौड़ाई अलग-अलग हो या जिनकी चौड़ाई समान हो लेकिन लम्बाई अलग-अलग हो या फिर जिनकी लम्बाई व चौड़ाई दोनों ही अलग हों।

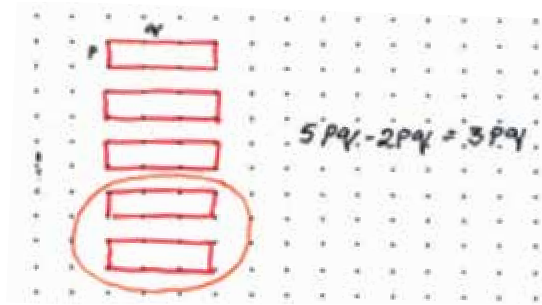
ऐसे आयतों का वर्णन हम किस तरह करेंगे?

यदि दो आयतों की लम्बाई या चौड़ाई अलग-अलग हो या दोनों ही अलग हों तो वह विजातीय आयत हैं।

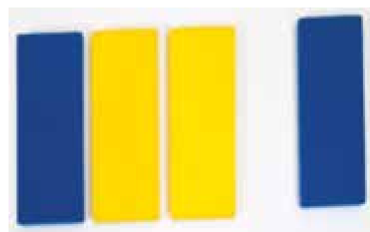
उन्हें दिखाएँ कि सजातीय पदों का उपयोग करने के लिए सजातीय आयतों का उल्लेख किया जाता है और सजातीय पदों को केवल सजातीय पदों में ही जोड़ा जा सकता है। इसी तरह सजातीय पदों को केवल सजातीय पदों में से ही घटाया जा सकता है।



उदाहरण : $3ab + 4ab = 7ab$



$5pq - 2pq = 3pq$



$4cd - cd = 3cd$

उन्हें यह भी दिखाएँ कि विजातीय आयतों का उल्लेख विजातीय पदों का उपयोग करके किया जाता है और विजातीय पदों को जोड़ा या घटाया नहीं जा सकता।



$4xy + 2ab$

निम्नलिखित को दर्शाने के लिए बच्चों से बिन्दुकित काग़ज़ में चित्र बनाने को कहें।

$ab + ab + ab = 3ab$

$3mn + 5rs - mn - 3rs = 2mn + 2rs$

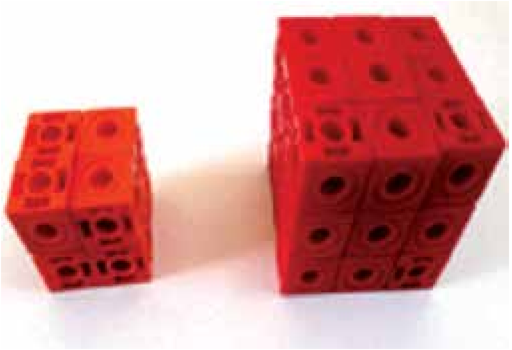
बच्चे अब निम्न प्रकार के अमूर्त व्यंजकों के समूह के जोड़ व घटाव करने की ओर बढ़ने की स्थिति में होंगे।

जोड़ें	घटाएँ :	गुणा करें :
$2ab + 3cd + ef$	$5ab + 4cd + fg$	$a + 2b + c$ with d
$ab + 2cd + ef$	$ab + 3cd + fg$	
$4a^2 + 6b^2 + c^2$		
$2a^2 + b^2 + 3c^2$		

गतिविधि 6

उद्देश्य : आयतन

सामग्री : इकाई घन, तिकोन बिन्दुकित काग़ज़।





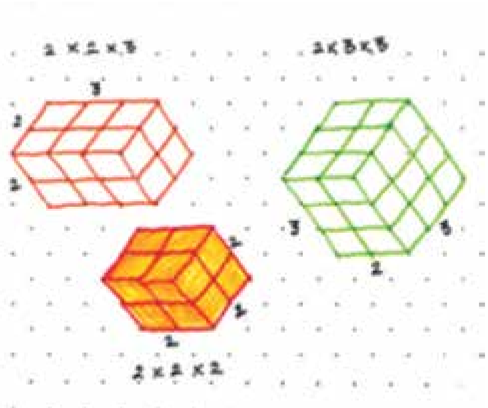
शुरुआत में बच्चों को अलग-अलग माप के घन व घनाभ बनाने को कहें।

घन या घनाभ के आयतन का सूत्र खोजने के लिए उन्हें विमाओं (लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई, आयतन) को एक तालिका के रूप में दर्ज करने के लिए कहें।

वह घनों की संख्या की गिनती करके और लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई के बीच के सम्बन्ध पर ध्यान देकर आयतन वाले कॉलम को भर सकते हैं।

चूँकि त्रि-विमीय ब्लॉक्स का आयतन लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई के पदों में बताया जाता है, इसलिए डिज़ाइन भाषा में तीन चरों का गुणनफल शामिल होता है।

बच्चे इसे तिकोन बिन्दुकित काग़ज़ (जिसे समूदरीक बिन्दुकित काग़ज़ (isometric dot paper) भी कहा जाता है) पर भी दर्ज कर सकते हैं।



गतिविधि 7

उद्देश्य : ब्लॉक्स के समूहों के लिए डिज़ाइन भाषा।

सामग्री : अलग-अलग माप और एक समान माप के घन व घनाभ, एक ही तरह के गत्ते के डिब्बे (साबुन के डिब्बे, टूथपेस्ट के डिब्बे)।





उदाहरण : $3abc + 2def$

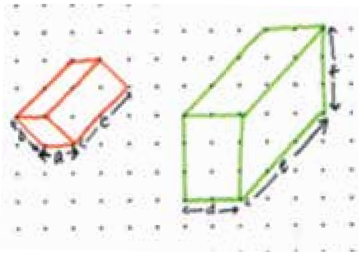
पूर्व ज्ञान : घन व घनाभ का आयतन

शब्दावली : सजातीय पद, विजातीय पद

उन्हें दिखाएँ कि समान लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई वाले घनाभों का उल्लेख सजातीय पदों द्वारा किया जाता है, जैसे कि चित्र में दर्शाया गया है।

शिक्षक डिब्बों को अलग-अलग तरह से संयोजित कर सकते हैं और बच्चों से डिज़ाइन भाषा का इस्तेमाल कर इन समूहों का वर्णन करने के लिए कह सकते हैं।

विजातीय घनाभों की भुजाओं को अलग-अलग अक्षरों (चरों) द्वारा दिखाया जाएगा और इनका उल्लेख विजातीय पदों के ज़रिए किया जाता है।



गतिविधि 8

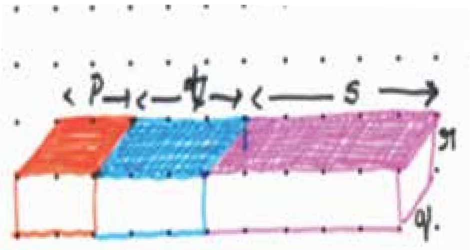
उद्देश्य : संयोजित ब्लॉक्स के लिए डिज़ाइन भाषा। गुणन व गुणनखण्ड।

सामग्री : जिन घन व घनाभ की फलकें उभयनिष्ठ हों उन्हें एक साथ लाया जा सकता है।

इनके लिए डिज़ाइन भाषा शुरुआत में ब्लॉक्स को अलग-अलग करके और फिर इन्हें जोड़कर दी जा सकती है।



$abc + abc + abc = 3abc$



दर्शाएँ कि $pqr + tqr + sqr = (p + t + s)\ qr$

इस स्तर पर बच्चों को अब सामान्य प्रकार के अमूर्त व्यंजकों के जोड़ व घटाव के लिए तैयार हो जाना चाहिए। **उदाहरण के लिए :**

जोड़ें :	**घटाएँ :**	**गुणन :**	**गुणनखण्ड :**
$abc + 2def$	$5pqr + 3uvw$	$p(p^2 + pq + pr + qr)$	$a^3 + a^2 b + a^2c$
$3abc + 4def$	$pqr + 2uvw$		
$2a^2b + b^2c + c^2a$	$7a^2b + a^2c + 3a^2d$		
$3a^2b + 4b^2c + c^2a$	$5a^2b + a^2c$		
$a^2b + 2b^2c + c^2a$			

निष्कर्ष

जब तक हम इस शृंखला के भाग-1 और भाग-2 में सुझाई गई गतिविधियों को पूरा करते हैं तब तक बच्चों को *चर, पद* और *व्यंजक* जैसी बीजगणितीय अवधारणाओं व शब्दों को उपयोग करने व इनका उपयोग करके विभिन्न संक्रियाएँ करने में सहज महसूस करना चाहिए।

उन्हें इसी तरह के अमूर्त व्यंजकों को कुशलतापूर्वक हल करने की स्थिति में होना चाहिए। एक बार जब 'सजातीय' व 'विजातीय' पदों के सामान्य सिद्धान्त समझ आ जाएँ व संक्रियाओं के नियम पूरी तरह दिमाग़ में बैठ जाएँ तो बच्चों को अगले चरण पर जाने के लिए तैयार होना चाहिए। उन्हें उच्च घातों और बहुचरीय पदों और व्यंजकों के लिए समान नियमों व सिद्धान्तों का उपयोग करने में सक्षम होना चाहिए।

इस शृंखला के तीसरे भाग में हम *समीकरणों के लिए पद्धतियों* पर चर्चा करेंगे।



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषिवैली स्कूल (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर से 1983 से जुड़ी हुई हैं। वहाँ वह विभिन्न विषय (गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू) पढ़ाती हैं। पिछले कुछ वर्षों तक वह टीचर आउटरीच कार्य में लगी हुई थीं। वर्तमान में वह एससीईआरटी (आन्ध्र प्रदेश) के साथ पाठ्यचर्या सुधार और प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों पर कार्य कर रही हैं। नब्बे के दशक में उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम (जिसे 'स्कूल इन अ बॉक्स' के नाम से जाना जाता है) का निर्माण किया था। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही